第 42 講　総合問題⑽

1　座標平面上に点 A$(3,\ 0)$，B$(0,\ 4)$ がある．点 P が単位円 C：$x^2+y^2=1$ 上を動くとき，次の各問いに答えよ．

(1)　△PAB の面積が最小となる点 P の座標を求めよ．

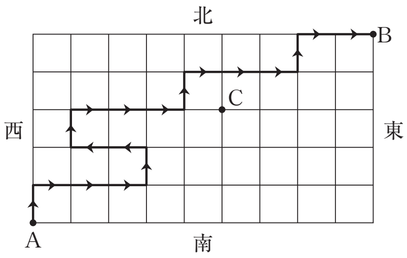
(2)　$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2$ が最小となる点 P の座標を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 図のように東西に 6 本，南北に 10 本の道がある．東西の道と南北の道の出会う地点を交差点とよび，隣どうしの交差点を結ぶ道を区間ということにする．A 地点から B 地点に進むとき，次の問いに答えよ．ただし，どの交差点においても，東西および北のいずれかに進むことはできるが，南に進むことはできないとする．また，後戻りもできないとする．図の中の太線は道順の例を示したものである．



(1) A 地点から B 地点へ行く道順の総数を求めよ．

(2) C 地点を通って，A 地点から B 地点へ行く道順の総数を求めよ．

(3) A 地点から B 地点まで 16 区間で行く道順の総数を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 数列 $\{a_n\}$ の各項 a_n ($n=1, 2, 3, \cdots\cdots$) を

$a_1=2$，a_n が偶数のとき，$a_{n+1}=a_n+1$ ……①,

a_n が奇数のとき　$a_{n+1}=2a_n$ ……②

により定める．次の問いに答えよ．ただし，k は正の整数とする．

(1) a_2，a_3，a_4，a_5，a_6 を求めよ．

(2) a_{2k} を用いて，a_{2k+2} を表せ．また，a_{2k-1} を用いて，a_{2k+1} を表せ．

(3) a_{2k}，a_{2k-1} を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 42 講　総合問題⑽

x が実数全体を動くとき，関数 $y=\dfrac{\cos x+2\sin x+1}{\cos x-3\sin x+5}$ ……①がとる値の範囲を求めたい．

$X=\cos x$，$Y=\sin x$ とおくと，XY 平面において点 $(X,\ Y)$ の描く軌跡は円であり，また①は X，Y の１次式，すなわち直線を表す．この円と直線が共有点をもてば，その点に対し x，そして y が定まる．

したがって，求める y の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}-\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エオ}}}\sqrt{\boxed{\text{カキ}}}\leqq y\leqq\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}+\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エオ}}}\sqrt{\boxed{\text{カキ}}}$$ である．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第42講　総合問題(10)

1　座標平面上に点A(3, 0)，B(0, 4)がある．点Pが単位円C：$x^2+y^2=1$ 上を動くとき，次の各問いに答えよ．

(1)　△PABの面積が最小となる点Pの座標を求めよ．

(2)　PA^2+PB^2 が最小となる点Pの座標を求めよ．

$P(\cos\theta,\ \sin\theta)$　$(0\leqq\theta<2\pi)$ とおく．

(1)　点Pと直線AB：$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}=1$　すなわち　$4x+3y-12=0$　の距離は

点Pが領域 $4x+3y-12<0$　にあることより

$$\frac{|4\cos\theta+3\sin\theta-12|}{\sqrt{4^2+3^2}}=-\frac{4\cos\theta+3\sin\theta-12}{5}=-\frac{1}{5}\{5\sin(\theta+\alpha)-12\}$$

$$=-\sin(\theta+\alpha)+\frac{12}{5}\qquad \text{ただし}\quad \cos\alpha=\frac{3}{5},\ \sin\alpha=\frac{4}{5}$$

$\theta+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$　つまり　$\theta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$　のとき最小となる．

このとき　$P\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right),\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)=(\sin\alpha,\ \cos\alpha)=\left(\boldsymbol{\dfrac{4}{5}},\ \boldsymbol{\dfrac{3}{5}}\right)$

(2)　$PA^2+PB^2=(\cos\theta-3)^2+\sin^2\theta+\cos^2\theta+(\sin\theta-4)^2$

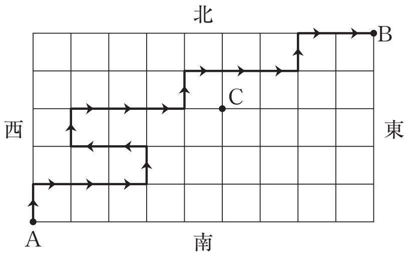
$=-8\sin\theta-6\cos\theta+27=-10\cos(\theta-\beta)+27$

ただし，$\cos\beta=\dfrac{3}{5}$，$\sin\beta=\dfrac{4}{5}$

これが最小となるのは　$\theta=\beta$ のとき

このとき　$P(\cos\theta,\ \sin\theta)=(\cos\beta,\ \sin\beta)=\left(\boldsymbol{\dfrac{3}{5}},\ \boldsymbol{\dfrac{4}{5}}\right)$

2　図のように東西に6本，南北に10本の道がある．東西の道と南北の道の出会う地点を交差点とよび，隣どうしの交差点を結ぶ道を区間ということにする．A地点からB地点に進むとき，次の問いに答えよ．ただし，どの交差点においても，東西および北のいずれかに進むことはできるが，南に進むことはできないとする．また，後戻りもできないとする．図の中の太線は道順の例を示したものである．



(1)　A地点からB地点へ行く道順の総数を求めよ．

(2)　C地点を通って，A地点からB地点へ行く道順の総数を求めよ．

(3)　A地点からB地点まで16区間で行く道順の総数を求めよ．

東，西，北へ行くことをそれぞれ　→，←，↑　と表す．また，東西の道を下から $y=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ 5$，　南北の道を左から　$x=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ 9$　に対応させる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(1)　$y=0$ から $y=1$ に上がる道は　$x=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 9$ の 10 通り

$y=1$ から $y=2$，$y=2$ から $y=3$，$y=3$ から $y=4$，$y=4$ から $y=5$ も同様に 10 通り．

よって求める総数は　$10^5=$ **100000（通り）**

(2)　$y=0$ から $y=2$ までの上がり方は　10^2（通り）

$y=2$ から $y=3$ に上がる道が

$x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ のとき

C を通った後に $y=4$ に上がる道は　$x=5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$　のいずれか

$x=6,\ 7,\ 8,\ 9$ のとき

C を通った後に $y=4$ に上がる道は　$x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$　のいずれか

よって　$y=2$　から　$y=4$　までの上がり方は　$5\times5+4\times6+10=59$（通り）

$y=4$ から $y=5$ の上がり方は　10 通り

したがって求める総数は $10^2\times59\times10=$ **59000（通り）**

(3)　16 区画の移動のうち，↑は 5 回

残り 11 区画において，最低でも → に 9 回行く必要がある．

よって →10 回　かつ　←1 回　のときのみである．

これら 16 個の順列を考える．

→ と ← はとなり合わない．また，← は 1 番左と 1 番右にくることはない．

よって「↑←↑」（これを○とする）が順列の中に現れる．

○ 1 個，↑3 個，→10 個の順列は　$\dfrac{14!}{3!10!}=4004$（通り）

このうち，○の左側に → がないのは，○の左側に↑が k 個（$k=0,\ 1,\ 2,\ 3$）あるとき

このときそれぞれ○の右側の順列を考えて $\dfrac{13!}{10!3!}+\dfrac{12!}{10!2!}+\dfrac{11!}{10!}+1=364$（通り）

○の右側に → がないときも同様 364 通り

したがって求める総数は　$4004-364\times2=$ **3276（通り）**

3　数列 $\{a_n\}$ の各項 a_n（$n=1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots$）を

$a_1=2$，a_n が偶数のとき，$a_{n+1}=a_n+1$　……①，

a_n が奇数のとき　$a_{n+1}=2a_n$　……②

により定める．次の問いに答えよ．ただし，k は正の整数とする．

(1)　$a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6$　を求めよ．

(2)　a_{2k} を用いて，a_{2k+2} を表せ．また，a_{2k-1} を用いて，a_{2k+1} を表せ．

(3)　$a_{2k},\ a_{2k-1}$ を求めよ．

(1)　$a_1=2$　（偶数）より

①から　$\boldsymbol{a_2}=a_1+1=\mathbf{3}$　（奇数）　　②から　$\boldsymbol{a_3}=2a_2=\mathbf{6}$　（偶数）

①から　$\boldsymbol{a_4}=a_3+1=\mathbf{7}$　（奇数）　　②から　$\boldsymbol{a_5}=2a_4=\mathbf{14}$　（偶数）

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

①から　$\boldsymbol{a_6 = a_5 + 1 = 15}$　（奇数）

(2)　①，②より　a_n が偶数のとき　a_{n+1} は奇数　　a_n が奇数のとき　a_{n+1} は偶数

また，a_1（奇数番目の項）が偶数であることより，帰納的に

偶数番目の項は奇数，奇数番目の項は偶数となる．

よって k が正の整数のとき

$a_{2k+2} = a_{2k+1} + 1 = 2a_{2k} + 1$　　　$a_{2k+1} = 2a_{2k} = 2(a_{2k-1} + 1) = 2a_{2k-1} + 2$

したがって　$\boldsymbol{a_{2k+2} = 2a_{2k} + 1}$　　　$\boldsymbol{a_{2k+1} = 2a_{2k-1} + 2}$

(3)　$a_{2(k+1)} = 2a_{2k} + 1$　より　$a_{2(k+1)} + 1 = 2(a_{2k} + 1)$，$a_2 + 1 = 4$

よって　$a_{2k} + 1 = 4 \cdot 2^{k-1} = 2^{k+1}$　　したがって　$\boldsymbol{a_{2k} = 2^{k+1} - 1}$

$a_{2(k+1)-1} = 2a_{2k-1} + 2$　より　$a_{2(k+1)-1} + 2 = 2(a_{2k-1} + 2)$，$a_1 + 2 = 4$

よって　$a_{2k-1} + 2 = 4 \cdot 2^{k-1} = 2^{k+1}$　　したがって　$\boldsymbol{a_{2k-1} = 2^{k+1} - 2}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第42講　総合問題⑽

x が実数全体を動くとき，関数 $y=\dfrac{\cos x+2\sin x+1}{\cos x-3\sin x+5}$ ……①がとる値の範囲を求めたい．

$X=\cos x$，$Y=\sin x$ とおくと，XY 平面において点 $(X,\ Y)$ の描く軌跡は円であり，また①は X，Y の 1 次式，すなわち直線を表す．この円と直線が共有点をもてば，その点に対し x，そして y が定まる．

したがって，求める y の範囲は

$$\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}-\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エオ}}\sqrt{\boxed{カキ}}\leqq y\leqq\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}+\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エオ}}\sqrt{\boxed{カキ}}$$ である．

$X=\cos x$，$Y=\sin x$ とおくと，$X^2+Y^2=1$

これは XY 平面において原点中心，半径 1 の円を表す．

また，①は　$y=\dfrac{X+2Y+1}{X-3Y+5}$　……②　であり，$X-3Y+5>-1-3\cdot1+5=1$ より②の分母が 0 になることはない．よって②より

$y(X-3Y+5)=X+2Y+1$　すなわち　$(y-1)X-(3y+2)Y+5y-1=0$　……③

これは XY 平面において直線を表す．

円 $X^2+Y^2=1$ と直線③が共有点をもつのは，円の中心 $(0,\ 0)$ と直線③の距離が円の半径 1 以下であるとき．

よって　$\dfrac{|5y-1|}{\sqrt{(y-1)^2+(3y+2)^2}}\leqq1$

$(5y-1)^2\leqq(y-1)^2+(3y+2)^2$

$15y^2-20y-4\leqq0$

したがって求める y の範囲は　$\dfrac{10-\sqrt{160}}{15}\leqq y\leqq\dfrac{10+\sqrt{160}}{15}$

すなわち　$\mathbf{\dfrac{2}{3}-\dfrac{4}{15}\sqrt{10}}\leqq y\leqq\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{15}\sqrt{10}$　である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。